Leçon n° 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimensions $n \geq 1$. X un espace affine de direction E.

I/ Ensembles et fonctions convexes.

A/ Barycentres. [AUD] [TAU]

Définition 1 : Barycentre.

Notation 2 : Notation barycentre.

Proposition 3 : Associativité Barycentre.

Application 4 : Concours des médianes d'un triangle.

Définition 5 : Isobarycentre.

Application 6 : Suites de polygone + annexe.

B/ Parties convexes d'un espace affine réel. [TAU]

Définition 7 : Segment fermé et ouvert.

Définition 8 : C est convexe si et seulement si tout segment reste dans C.

Exemple 9 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exemple 10 : Les boules sont convexes.

Définition 11 : Combinaison convexe.

Proposition 12 : C convexe ssi tte combinaison convexe de points de C reste dans C.

Proposition 13 : Un convexe est connexe par arcs.

Exemple 14 : Les sous-espaces affines/vectoriels sont convexes.

Proposition 15 : L'image directe et réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

Application 16 : Les demi-espaces sont convexes.

Proposition 17 : Une intersection quelconque de convexes reste convexe.

C/ Fonctions convexes. [ROM]

Définition 18 : Fonctions convexes sur un ensemble convexe.

Proposition 19 : f convexe si et seulement si son épigraphe est convexe + annexe.

Proposition 20 : f convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Exemple 21 : Γ est convexe.

Proposition 22 : det est log-convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 23 : Inégalité de Hölder.

Proposition 24 : Inégalité de Jensen.

II/ Propriétés topologiques des ensembles convexes.

A/ Enveloppe convexe. [TAU] [FGNAlg1]

Définition 25 : Enveloppe convexe.

Proposition 26 : L'enveloppe convexe est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de la partie.

Algorithme 27 : Algorithme de Graham pour trouver l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points + annexe.

Développement 1

Théorème 28 : Gauss-Lucas.

Proposition 29 : Son énoncé équivalent.

Application 30 : Application à un polynôme

Proposition 31 : Si A ouverte alors $\mathrm{Conv}(A)$ est ouverte.

Théorème 32 : Carathéodory.

B/ Compacité. [TAU] [ZQ]

Proposition 33 : Si A compacte alors $\mathrm{Conv}(A)$ compacte.

Développement 2.a)

Application 34 : Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 35 : Si A bornée, $\mathrm{Conv}(A)$ aussi et les diamètres sont égaux.

C/ Intérieur et adhérence. [TAU]

Proposition 36 : Si A convexe alors $\overline{A}$ convexe et $\mathring{A}$ est convexe + props.

Proposition 37 : Si A convexe alors $\mathring{A} \neq \emptyset \iff A$ contient $n+1$ points affinements indépendants $\iff \langle A \rangle = X$.

D/ Hyperplans de séparation. [OBJ] [TAU]

Définition 38 : Hyperplan de séparation.

Théorème 39 : Projection sur un convexe fermé.

Développement 2.b)

Application 40 : Existence hyperplan de séparation séparant un point d'un convexe fermé.

E/ Points extrémaux. [TAU]

Définition 41 : Point extrémal.

Proposition 42 : Propriétés équivalentes.

Théorème 43 : Krein-Millman.

Références :

- [AUD] Audin Géométrie p. 29
- [TAU] Tauvel Géométrie p. 17 et p. 69-83
- [ROM] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 225-245
- [FGNAlg1] Francinou, Gianella, Nicolas Algèbre tome 1 p. 229
- [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p. 97
- [ZQ] Zuily-Queffeléc p. 205